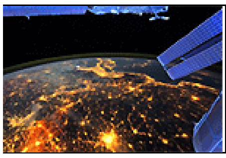


COURS n°6

« Mouvement dans un champ de gravitation : satellites »

Les compétences à acquérir…

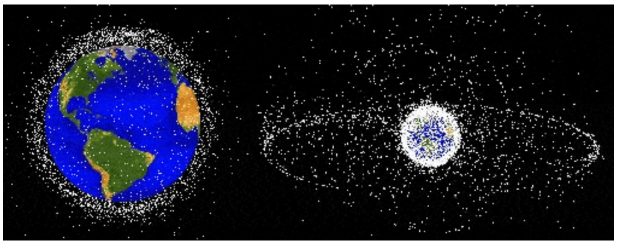
- Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
- Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.
- Mouvement des satellites et des planètes. Orbite.
- Lois de Kepler.
- Période de révolution.
- Satellite géostationnaire.

Depuis 1957 l'environnement spatial proche de la Terre voit chaque année de nouveaux débris s'accumuler en raison de la prolifération des vols spatiaux. **Regarder les 5 premières minutes de la vidéo** https://youtu.be/swRLFRkxjsE

Au fil des années des **dizaines de tonnes de matériels devenus inutiles sont abandonnés sur orbite** en attendant une lente dégradation ou leur récupération.

Selon un rapport du NORAD établi le 1/01/1999 et suite au recensement effectué par le Space Surveillance Network de l'US Space Command (USSPACECOM), depuis 1957, **la Russie, les Etats-Unis, l'Europe, le Japon, la Chine, l'Inde et Israël** ont procédé à près de **5 343 lancements réussis d'engins spatiaux.**

Cela représente plus de **20 000 tonnes de matériaux et 25 500 objets divers en orbite autour de la Terre**, parmi lesquels **il ne reste que 595 satellites opérationnels** représentant une masse de 4 500 tonnes.



Parmi ces objets spatiaux on dénombre 15 680 débris de plus de 10 cm orbitant entre 400 et 1 500 km d'altitude. 100 000 objets d'une taille inférieure à 10 cm sont en orbite basse et il devrait y avoir des centaines de milliers de débris de taille inférieure au centimètre pour un total de quelque 35 millions de débris si on s'attarde aux particules de moins d'un millimètre.

Qu'est ce qui régit les mouvements de ces satellites ? …
les 3 lois de KEPLER et la seconde loi de Newton

Je construis mon cours à partir de la vidéo 1 du chapitre 5 sur le site capneuronal …

I- Lois de KEPPLER :

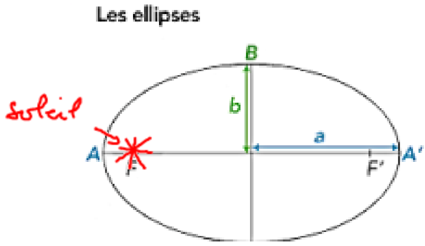
Au 17ème siècle, en utilisant les observations de Tycho Brahe (1546-1604), Johanne Kepler formule trois lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du soleil.

Première loi de Kepler : **Loi des orbites**

Dans le référentiel héliocentrique, **la trajectoire** du centre de gravité d'une **planète est une** ..ellipse.............. dont le centre de gravité du soleil est l'un des foyers. F et F'

Rq : a est le demi……. grand axe.

Dessinez un joli soleil sur l'ellipse ci-contre !



F et F' sont les foyers de l'ellipse.
[AA'] est son grand axe il mesure 2a.
[BB'] est son petit axe, il mesure 2b.

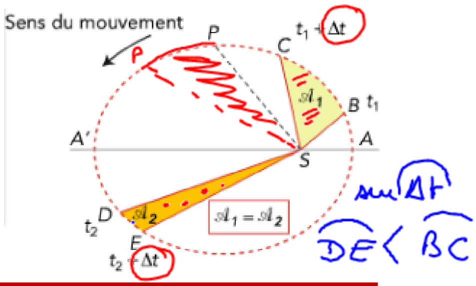
Deuxième loi de Kepler : **Loi des aires**

Le segment de droite [SP] reliant les centres de gravité S du soleil et de la **planète balaie des aires** ….égales………… **pendant des durées égales**.

Pour une même Δt, les Aires A_1 et A_2 sont …égales… :

…A_1… = …A_2…

La planète accélère en s'approchant du soleil.



Troisième loi de Kepler : **Loi des périodes**

Pour toutes les planètes du système solaire, le **rapport entre le carré de la période de révolution T et le cube du demi-grand axe a est égale à une** …………………… notée k.

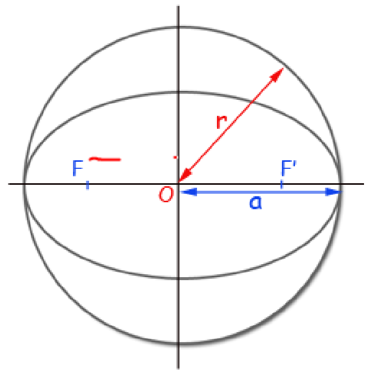
$T^2 = k \times a^3$

T^2 et a^3 sont proportionnels.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = k} = \text{constante (Astre attracteur Soleil)}$$

Remarques importantes pour les exercices :

- Les lois de Kepler peuvent s'appliquées à toutes planètes ou satellite en rotation autour d'un astre attracteur de masse M.
- Afin de poursuivre l'étude du mouvement d'un satellite ou d'une planète autour d'un astre attracteur, nous considérerons, par approximation, que sa trajectoire est un cercle de rayon r.



- Dans le cas particulier où la trajectoire est un cercle de rayon r, la troisième loi de Kepler devient : r = a

$$\frac{T^2}{r^3} = k = \text{constante}$$

Donnez l'expression et calculer le rayon r de la trajectoire de la terre autour du soleil

3ème Kepler

$$\frac{T^2_{Mer}}{r^3_{Mer}} = \frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_V^2}{r_V^3} = k$$

$$\sqrt[2]{x} = (x)^{1/2} \qquad \sqrt[3]{x} = (x)^{1/3}$$

$$r_T = \sqrt[3]{\frac{T_T^2 \times r_V^3}{T_V^2}}$$

3° LOI

Planète	T en s	r en m	T^2 / r^3
MERCURE	$7{,}6.10^6$	$5{,}79.10^{10}$	$2{,}98.10^{-19}$
VENUS	$1{,}94.10^7$	$1{,}08.10^{11}$	$2{,}99.10^{-19}$
TERRE	$3{,}16.10^7$	x	$3{,}02.10^{-19}$
MARS	$5{,}94.10^7$	$2{,}28.10^{11}$	$2{,}98.10^{-19}$
JUPITER	$3{,}74.10^8$	$7{,}78.10^{11}$	$2{,}97.10^{-19}$
SATURNE	$9{,}30.10^8$	$1{,}42.10^{12}$	$3{,}02.10^{-19}$
URANUS	$2{,}66.10^9$	$2{,}87.10^{12}$	$2{,}99.10^{-19}$
NEPTUNE	$5{,}20.10^9$	$4{,}50.10^{12}$	$2{,}97.10^{-19}$

PERIODE CONSTANTE

- A partir de la 3ème loi de Kepler, justifier le graphe ci-contre. C'est-à-dire démontrer que r^3 (ou a^3) et T^2 sont proportionnels. Exprimez ce coefficient de proportionnalité k'.

3ème loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = k$

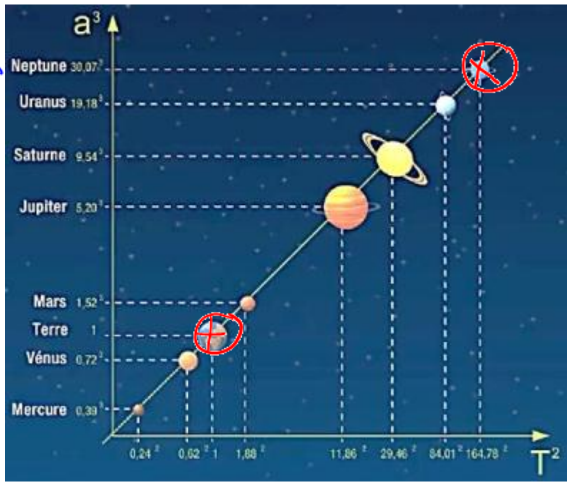
=> $T^2 = k \times r^3$ donc T^2 et r^3 sont proportionnels

la courbe ci-contre $r^3 = f(T^2)$ est une droite qui passe par l'origine. On retrouve T^2 et r^3 sont proportionnels

$r^3 = k' \times T^2$ avec $k' = \frac{1}{k}$

Expression de k'

$$k' = \frac{r_N^3 - r_T^3}{T_N^2 - T_T^2}$$ avec k' exprimé en m^3/s^2

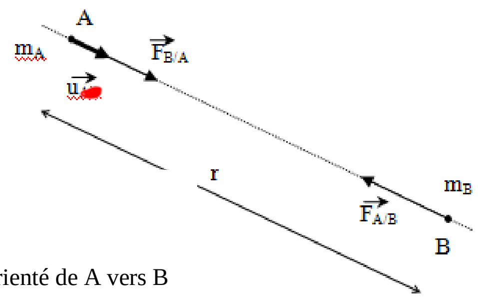


II- Comment décrire le mouvement des satellites et des planètes ?

1- Force de gravitation universelle :

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire

Deux corps assimilés à des points A et B, de masses m_A et m_B séparés d'une distance *r*, **exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction gravitationnelle** de même valeur, $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ telles que :



$$\overrightarrow{F_{B/A}} = -\overrightarrow{F_{A/B}} = G \times \frac{m_A \times m_B}{r^2} \vec{u}$$

et $F_{B/A} = F_{A/B}$

les 2 vecteurs forces sont colinéaires et de sens contraires

m_A et m_B en kilogrammes (kg)

$F_{A/B} = F_{B/A}$ en Newtons (N)

$\overrightarrow{u_{AB}}$ vecteur unitaire de direction (AB) orienté de A vers B

$G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$, constante de gravitation

Remarque : *Cette loi se généralise aux corps non ponctuels à répartition sphérique de masse, comme la Terre, en considérant que toute la masse est concentrée en son centre.*

2- Etude du mouvement d'un satellite ou d'une planète :

On étudie le mouvement d'un satellite S de masse m_{sat} assimilé à un point matériel, en orbite autour de la terre de centre O et de masse M_T. On se place dans l'approximation d'une **orbite circulaire** de rayon r=OA = a

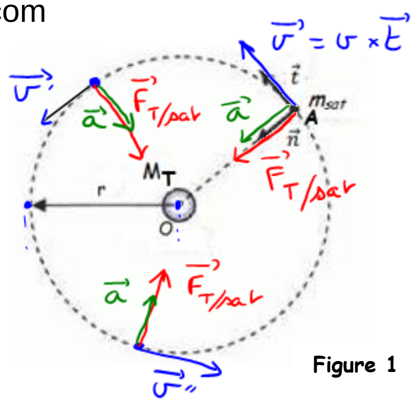


Figure 1

Définition du système et du référentiel :

- **Système** : {satellite}..............
- **Référentiel** : Géocentrique suppose Galiléen..........,

Le mouvement étant plan, on utilise le **repère de Frenet mobile** (A, $\vec{t}$, $\vec{n}$) où $\vec{t}$ est appelé vecteur tangentiel toujours dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ vecteur normal dirigé vers le centre de la terre

Bilan de forces extérieures appliquées au système :

- le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation universelle exercée par la terre..................

Expression vectorielle de cette force et ses coordonnées dans le **repère de Frenet mobile** (A, $\vec{t}$, $\vec{n}$)

$\vec{F}_{T/sat} = G \times \frac{M_T \times m_{sat}}{r^2} \times \vec{n} \; (+ \; 0 \times \vec{t}\,)$ dans le repère

Coordonnées $\vec{F}_{T/sat}$ $\begin{cases} F_t = 0 \\ F_n = G \times \dfrac{M_T \times m_{sat}}{r^2} \end{cases}$

Appliquons la deuxième loi de Newton afin de déterminer l'expression de l'accélération du satellite ainsi que ses coordonnées dans le repère de Frenet:

Seconde loi de Newton

$\sum \vec{F}_{ext} = m_{sat} \times \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{F}_{T/sat} = m_{sat} \times \vec{a}$

$\Rightarrow \cancel{m_{sat}} \times \vec{a} = G \times \frac{M_T \cancel{m_{sat}}}{r^2} \vec{n}$

donc

$\vec{a} = \frac{G \times M_T}{r^2} \vec{n} + (0 \times \vec{t}\,)$

Coordonnées du vecteur **accélération**

$\vec{a} \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \dfrac{G \times M_T}{r^2} \end{cases}$

Dans le repère de Frenet ($O, \vec{t}, \vec{n}$), l'accélération $\vec{a}$ dans un mouvement quelconque a pour expression générale :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \times \vec{t} + \frac{v^2}{r} \times \vec{n}$$

A partir des coordonnées du vecteur accélération et de l'expression générale de l'accélération dans le repère de Frenet, que peut on dire la vitesse et quelle est sont expression ? Quelle est la relation « simple » entre la vitesse et l'accélération ?

l'accélération s'exprime dans le repère de Frenet

$\vec{a} = \boxed{\frac{dv}{dt}} \times \vec{t} + \boxed{\frac{v^2}{r}} \vec{n}$

et $\vec{a} = \boxed{0} \times \vec{t} + \boxed{\frac{GM_T}{r^2}} \vec{n}$

On en déduit que

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{constante}$

la norme du vecteur vitesse est constante mais pas le vecteur

On vient de montrer que le mouvement est circulaire uniforme.

et $\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{r^2} \times r$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$

Nous retiendrons que, pour un mouvement circulaire et uniforme, l'accélération est centripète (toujours dirigé vers le centre du cercle) et son expression est

$a = \frac{v^2}{r}$ = constante pour r donné

- Exprimer la période de révolution T du satellite autour de l'astre : c'est la durée mise par le satellite pour faire un tour autour de la terre.

On sait que $v = \frac{L}{T}$ où L est la distance parcourue par le satellite et T la durée du parcourt. $v = \frac{d}{\Delta T} = \frac{?}{T}$

- Exprimer L en fonction du rayon r

Le sat parcourt 1 tour en une période L = périmètre

$L = 2\pi r$

En déduire l'expression de T

$v = \frac{2\pi r}{T}$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$ avec $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_T}{r}}$

$\Rightarrow T^2 = \frac{r}{GM_T} \times 4\pi^2 r^2$

$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}}$

$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}}$

A partir de l'expression précédente retrouver la 3ème loi de Kepler. C'est dire que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est constant et qu'il est indépendant de la masse du satellite : il ne dépend que de la masse responsable de l'attraction gravitationnelle (…ici…la terre……..).

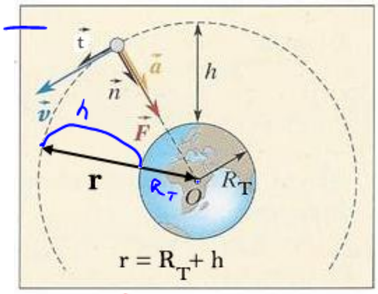
on a $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}} = k$ est une constante qui ne dépend de la masse de l'AA)

Remarque : La vitesse et la période d'un satellite animé d'un mouvement circulaire et uniforme autour du centre de la Terre dépendent uniquement de l'altitude du satellite. Quand l'altitude augmente, **la vitesse** diminue........ et **la période** de révolution…↗…..

distance T - sat.

Expression de son altitude h en fonction de T,R_T et M_T:

On pose r = R_T + h où R_T est le rayon de la terre



$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}}$

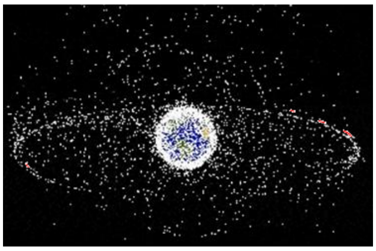
$\Rightarrow 4\pi^2 \times \frac{(R_T+h)^3}{GM_T} = T^2$

$\Rightarrow (R_T + h)^3 = \frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}$

$\Rightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$ $\Rightarrow h = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}}}_{m} - \underbrace{R_T}_{m}$

⚠ R_T doit être en m.

3- Cas particulier des satellites géostationnaires : Il existe des satellites dits **géostationnaires**. Ils parcourent, dans le référentiel géocentrique, un cercle d'Ouest en Est et permettent d'observer continuellement des « zones » de la terre.



- Quelles sont les 2 conditions pour lesquelles un satellite peut il être en géostationnaire ?
  - …Sa trajectoire est dans le plan équatorial
  - …Ce sat géo se trouve à une altitude précise $h_{géo}$

- Quelle est la relation entre la période de rotation sur elle même de la terre T_T et la période de révolution du satellite géostationnaire autour de la terre T_{sat} ? Calculer la valeur T_{sat} en seconde

Pour que sat soit toujours au-dessus d'un même point de la terre

$T_{sat} = T_T = 24h = 1 \times 24 \times 60 \times 60 = 86400$ s

En déduire l'altitude $h_{géo}$ d'un satellite géostationnaire

$M_T = 5,97 . 10^{24}$ kg
$R_T = 6400$ km

(*) Vitesse du sat géo stat (m, km)

$h_{géo} = \sqrt[3]{\frac{T_{sat}^2 \times GM_T}{4\pi^2}} - R_T$

$= \sqrt[3]{\frac{(86400)^2 \times 6,67 . 10^{-11} \times 5,97 . 10^{24}}{4\pi^2}} - 6400 \times 10^3 = 3,60 . 10^7$ m

$= 3,60 \times 10^4$ km

$\sim 36\,000$ km

III- *Exploitation de la troisième loi :*

1- Le graphe ci-dessous ci-contre représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Ce graphe est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

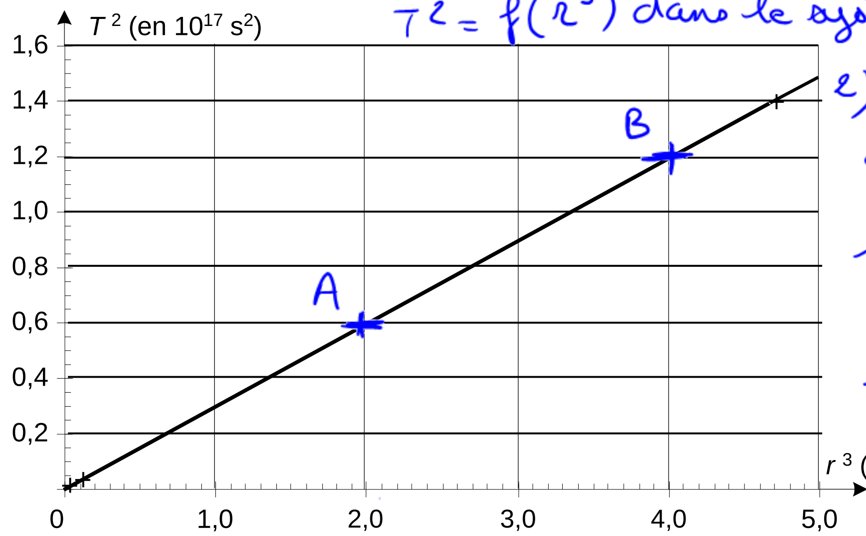
2- En utilisant le graphe, montrer que $\frac{T^2}{r^3} \approx 3{,}0.10^{-19}$ SI (s^2/m^3)

3- Déterminer la masse du soleil.

> « *Une équipe composée de Franck Marchis (université de Californie à Berkeley) et de trois astronomes de l'Observatoire de Paris, Pascal Descamps, Daniel Hestroffer et Jérome Berthier, vient de découvrir un astéroïde, nommé Rhea Sylvia, qui gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans.* »

4- Déterminer la distance soleil – Rhea notée d_{RS}

$T^2 = f(r^3)$ dans le système solaire



2) $\frac{T^2}{r^3} = k$ avec coefficient de la droite.

$$k = \frac{T_B^2 - T_A^2}{r_B^3 - r_A^3}$$

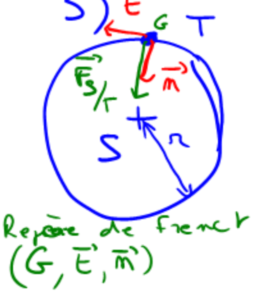
$$k = \frac{(1{,}2 - 0{,}6) \times 10^{17}}{(4{,}0 - 2{,}0) \times 10^{35}} = 3{,}0.10^{-19}\ s^2/m^3$$

1) La courbe $T^2 = f(r^3)$ est une droite qui passe par l'origine. Donc T^2 et r^3 sont proportionnels

$\Rightarrow T^2 = k \times r^3$ avec k constant.

$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = k$ ce qui correspond à la 3ème loi de Kepler

3)



- $\vec{F}_{S/T}$ | Mouvement circulaire
- 2° loi de Newton
  - ↳ $\vec{a}$
- $\Rightarrow v$
  - ↳ T
    - ↳ 3ème de Kepler

Mouvement quelconque

$$\underbrace{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{r}\vec{m}}$$

$$\boxed{k = \frac{4\pi^2}{G M_S}}$$

Système {Terre}

$$\vec{F}_{S/T} = G \times \frac{M_S \times M_T}{r^2}\vec{m}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m_{système}\,\vec{a}$$

$$G\frac{M_S \times \cancel{M_T}}{r^2}\vec{m} = \cancel{M_T} \times \vec{a} \Rightarrow \underbrace{\vec{a} = \frac{G M_S}{r^2}\vec{m} + 0 \times \vec{t}}$$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v =$ constante
Mvt circulaire uniforme

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G M_S}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G M_S \times \cancel{r}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$