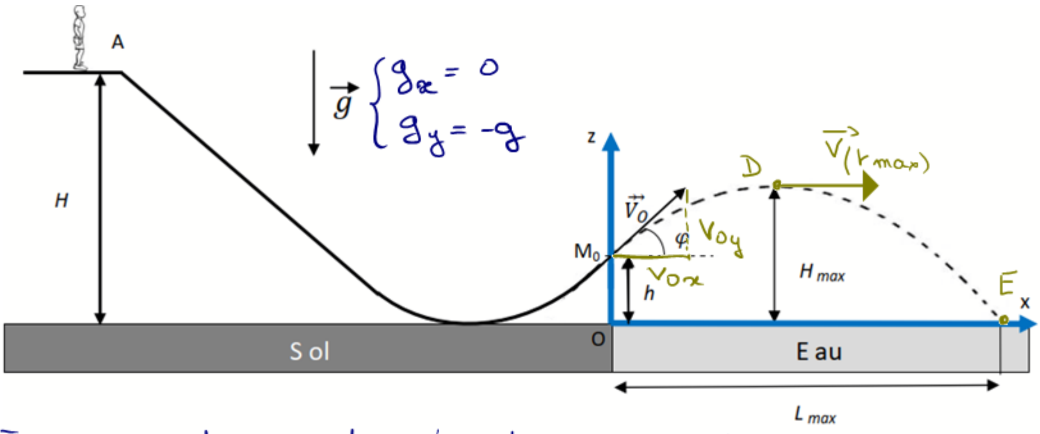
Exercice

Partie 1



$\cos\varphi = \frac{V_{0x}}{V_0}$

$\sin\varphi = \frac{V_{0y}}{V_0}$

1-1 Expression des coordonnées du vecteur $\vec{a}$

système {skieur}

Referentiel terrestre

Second loi de Newton { le skieur est supposé en chute libre

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}$ donc $m\vec{g} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ les coordonnées de $\vec{a}$ sont

$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$ et $a = g$

1-2 Recherche des équations horaires

Conditions initiales ; à t = 0 s

$\vec{V_0} \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\varphi \\ V_{0z} = V_0 \sin\varphi \end{cases}$ $\vec{OG_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = h \end{cases}$

ces conditions initiales correspondent aux constantes d'intégration

Coordonnées de $\vec{V}(t)$

On a $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ donc par intégration

$\vec{V}(t) \begin{cases} V_x(t) = V_{0x} \\ V_z(t) = -gt + V_{0z} \end{cases}$ $\Rightarrow \vec{V}(t) \begin{cases} V_x(t) = V_0 \cos\varphi \\ V_z(t) = -gt + V_0 \sin\varphi \end{cases}$

De plus $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt}$ donc par intégration

$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = V_0 \cos\varphi \times t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\varphi \times t + z_0 \end{cases}$

donc $\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = V_0 \cos\varphi \times t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\varphi \times t + h \end{cases}$

2-1 : Coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire

Le vecteur $\vec{V}(t_{max})$ au sommet de la trajectoire est horizontale

donc $V_z(t_{max}) = 0$

2-2 donc $V_z(t_{max}) = -g\,t_{max} + V_0 \sin\varphi = 0$

$\Rightarrow t_{max} = \dfrac{V_0 \sin\varphi}{g}$

2-3 Soit D le point en haut de la trajectoire

$D\begin{cases} x_D \\ z_D = H_{max} \end{cases}$ Le point D appartient à la trajectoire donc ces coordonnées vérifient les équations horaires.

$z(t_{max}) = -\frac{1}{2} g t_{max}^2 + V_0 \sin\varphi \times t_{max} + h = H_{max}$

donc $H_{max} = -\frac{1}{2}\cancel{g}\dfrac{V_0^2 \sin^2\varphi}{g^{\cancel{2}}} + V_0 \sin\varphi \times \dfrac{V_0 \sin\varphi}{g} + h$

$= -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{V_0^2 \sin^2\varphi}{g} + \dfrac{V_0^2 \sin^2\varphi}{g} + h \quad \Rightarrow H_{max} = \dfrac{V_0^2 \sin^2\varphi}{2g} + h$

$-\frac{1}{2}$ carotte + 1 carotte = $\frac{1}{2}$ carotte

2-4 Calcul de la hauteur H_{max}

$H_{max} = \dfrac{V_0^2 \sin^2\varphi}{2g} + h = \dfrac{5{,}9^2 \times \sin^2 45}{2 \times 9{,}81} + 1{,}7$

$= 2{,}6$ m

2-5 : Expression de la trajectoire

$\vec{OG}(t)\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\varphi \times t & (1) \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\varphi \times t + h & (2) \end{cases}$

(1) On isole t dans l'équation 1
(2) Puis on remplace dans l'équation 2

donc $t = \dfrac{x(t)}{V_0 \cos\varphi}$ et $z = -\frac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{V_0 \cos\varphi}\right)^2 + \cancel{V_0} \sin\varphi \times \dfrac{x}{\cancel{V_0} \cos\varphi} + h$

donc $z = -\dfrac{g}{2V_0^2 \times \cos^2\varphi} \times x^2 + \tan\varphi \times x + h$

2-6 : Expression de la portée au point E

$E\begin{cases} x_E = L_{max} \\ z_E = 0 \end{cases}$ Les coordonnées du point E vérifie l'équation de la trajectoire

donc $z_E = -\dfrac{g}{2V_0^2 \times \cos^2\varphi} \times x_E^2 + \tan\varphi \times x_E + h = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{g}{2V_0^2 \times \cos^2\varphi} \times L_{max}^2 + \tan\varphi \times L_{max} + h = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{9{,}81}{2 \times 5{,}9^2 \times \cos^2 45} \times L_{max}^2 + \tan 45 \times L_{max} + 1{,}7 = 0$

$\Rightarrow -0,28 \times L_{max}^2 + L_{max} + 1,7 = 0$

Recherche des racines

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-0,28) \times 1,70 = 2,904$

$\Rightarrow L_{max\,1} = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + \sqrt{2,9}}{-2 \times 0,28} = -1,3 \text{ m}$ ⚠ Impossible

$\Rightarrow L_{max\,2} = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{2,9}}{-2 \times 0,28} = 4,8 \text{ m}$

Donc $L_{max} = 4,8$ m

Partie 3 :

3-1 : Expression des énergies

$E_m(A) = E_C(A) + E_{pp}(A) = \frac{1}{2} m V_A^2 + m g z_A$ avec $V_A = 0$ m/s

$= m g H_1$

$E_m(0) = E_C(0) + E_{pp}(0) = \frac{1}{2} m V_0^2 + m g z_0$

$= \frac{1}{2} m V_0^2 + m g h_1$

3-2 : Il est dit qu'il y a conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m(0) - E_m(A) = 0$

$\Rightarrow E_m(0) = E_m(A)$

3-3 Calcul de V_0

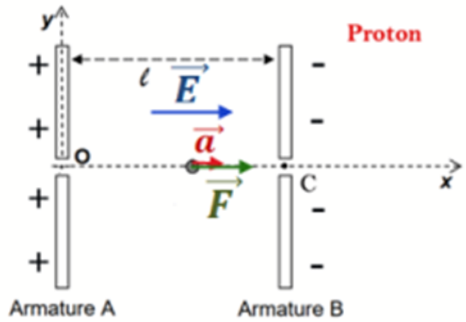
$E_m(0) = E_m(A) \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} V_0^2 + \cancel{m} g h_1 = \cancel{m} g H_1$

$\Rightarrow V_0 = \sqrt{2g(H_1 - h_1)}$

$= \sqrt{2 \times 9,81 \times (3,5 - 0,85)} = 7,2$ m/s

Exercice 2 :

1) Le proton, qui est une particule chargée positivement $q_p = +e$, est ici accéléré. Il faut donc que l'armature B soit négative.



Le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ est toujours perpendiculaire aux armatures et dirigé de l'armature négative vers l'armature positive.

2) Coordonnées du vecteur $\vec{E}$

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

3) On a $\vec{F} = q\vec{E} = +e\vec{E}$

4) Voir

5) Coordonnées de $\vec{F}\begin{cases} F_x = eE_x = eE \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$

6) Seconde loi de Newton

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$\Rightarrow \vec{F} = e\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E}$

donc $\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = \frac{e}{m}E_x = \frac{e}{m}\times E \\ a_y(t) = \frac{e}{m}E_y = 0 \\ a_z(t) = \frac{e}{m}E_z = 0 \end{cases}$

7) Voir le graphique

8) Conditions initiales

$\vec{V_0}\begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \\ V_{0z} = 0 \end{cases}$ et $\vec{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$

9) On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, par intégration on a

$$\vec{v}\begin{cases} V_x(t) = \frac{e}{m}\times E\times t + V_{0x} = \frac{e}{m}\times E\times t + V_0 \\ V_y(t) = V_{0y} = 0 \\ V_z(t) = V_{0z} = 0 \end{cases}$$

10) On a montré que $V_y(t) = 0$, donc le vecteur vitesse n'a pas de coordonnées sur (Oy) et (Oz). Le mouvement ~~est~~ donc selon l'axe (Ox) : on parle d'accélérateur linéaire.

11) On a $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt}$, par intégration on obtient

$$\vec{OG}(t)\begin{cases} x(t) = \frac{eE}{2m}\times t^2 + V_0\times t + x_0 = \frac{eE}{2m}\times t^2 + V_0\times t \\ y(t) = y_0 = 0 \\ z(t) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Equation horaire

12) Le point C a pour coordonnées $C\begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

13) Si le proton se trouve au point C à l'instant t_f

alors $x(t_f) = \frac{eE}{2m} \times t_f^2 + V_0 \times t_f = \ell$

Il faut donc résoudre cette équation afin de trouver t_f

AN :

$$\Rightarrow \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19} \times 10{,}0 \cdot 10^3}{2 \times 1{,}7 \cdot 10^{-27}} \times t_f^2 + 2{,}0 \cdot 10^3 \times t_f - 6{,}5 \cdot 10^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow 4{,}7 \cdot 10^{11} \times t_f^2 + 2{,}0 \cdot 10^3 \times t_f - 6{,}5 \cdot 10^{-2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2{,}0 \cdot 10^3)^2 - 4 \times 4{,}7 \cdot 10^{11} \times (-6{,}5 \cdot 10^{-2}) -$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{11}$$

$$\Rightarrow t_{f1} = \frac{-2{,}0 \cdot 10^3 + \sqrt{1{,}2 \cdot 10^{11}}}{2 \times 4{,}7 \cdot 10^{11}} = 3{,}7 \cdot 10^{-7}\ s$$; l'autre valeur de t_f est négative.

14) Calcul de V_f :

$$V_f = V(t_f) = \frac{eE}{m_p} \times t_f + V_0$$

$$\Rightarrow V_f = \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19} \times 10 \times 10^3}{1{,}7 \cdot 10^{-27}} \times 3{,}7 \cdot 10^{-7} + 2{,}0 \cdot 10^3 = 3{,}50 \cdot 10^5\ m/s$$

$$= 350 \cdot 10^3\ m/s$$

15) Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \Sigma W_{OC}(\vec{F})$$

$$\Rightarrow E_c(C) - E_c(O) = W_{OC}(\vec{F})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = \vec{F} \cdot \vec{OC}$$

$$= eE \times \ell$$

$\vec{F}$ et $\vec{OC}$ sont colinéaires et de même sens donc $\cos(\vec{F}; \vec{OC}) = \cos(0) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_p V_f^2 = \frac{1}{2} m_p V_0^2 + eE \times \ell$$

$$\Rightarrow V_f^2 = V_0^2 + \frac{2eE\ell}{m_p}$$

$$\Rightarrow V_f = \sqrt{V_0^2 + \frac{2eE\ell}{m_p}} \Rightarrow V_f = \sqrt{(2{,}0 \cdot 10^3)^2 + \frac{2 \times 1{,}60 \cdot 10^{-19} \times 10 \times 10^3 \times 6{,}5 \cdot 10^{-2}}{1{,}7 \cdot 10^{-27}}}$$

$$\Rightarrow V_f = 3{,}50 \cdot 10^5\ m/s$$

On retrouve la valeur précédente.