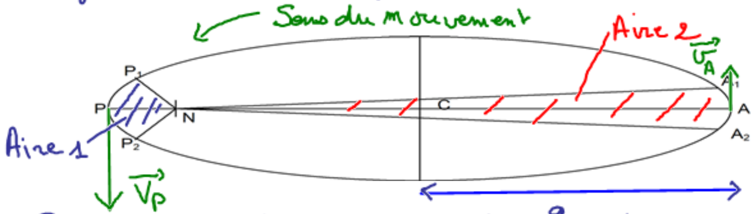
Exercice 1 : /20 Total /40

1) Le mouvement des satellites

1-1 : L'orbite de Néréide est décrite dans un référentiel
1 neptunocentrique (autour de Neptune)

1-2
Première loi de Kepler : Néréide décrit une orbite elliptique dont Neptune occupe l'un des foyers
1
Deuxième loi de Kepler : le segment Néréide - Neptune [NN]
1 balaye des aires égales sur des durées égales.

1-3
0,5



1-4-1 : D'après la seconde loi de Kepler
Aire1 = Aire 2 0,5

1.4.2 Sur une même durée Δt, Néréide parcourt une distance $\widehat{P_1PP_2} < \widehat{A_1AA_2}$. Les vitesses moyennes en A et B s'expriment

1 $v_P = \frac{\widehat{P_1PP_2}}{\Delta t}$ et $v_A = \frac{\widehat{A_1AA_2}}{\Delta t}$ Donc $v_P > v_A$. Le satellite va plus vite lorsqu'il s'approche de Neptune

1-5-1 : Troisième loi de Kepler : Le carré de la période de révolution $T_{Néé}$ de Néréide est proportionnel au cube du demi grand axe a
1 $T^2 = k \times a^3$ ou $\frac{T^2}{a^3} = k$ k étant une constante

1-5-2 Calcul de $\frac{T^2_{Trit}}{R_1^3}$ dans le cas de Triton

1 $$\frac{T^2_{Trit}}{R_1^3} = \frac{(\overbrace{5,877}^{4\ CS} \times 86400)^2}{(\underbrace{3,547}_{4\ CS} \cdot 10^5 \times 10^3)^3} = \overbrace{5,778}^{4\ CS} \cdot 10^{-15}\ s^2/m^3$$

1-5-3 : En considérant que Triton et Néréide ont des trajectoires circulaires ($a_{Néé} = R_{Néé}$) elles doivent satisfaire la 3ème loi de Kepler.

2 $$\Rightarrow \frac{T^2_{Néé}}{R^3_{Néé}} = \frac{T^2_{Trit}}{R_1^3} \Rightarrow T_{Néé} = \sqrt{\frac{T^2_{Trit}}{R_1^3} \times R^3_{Néé}}$$

$$\Rightarrow T_{Néé} = \sqrt{5,778 \cdot 10^{-15} \times (5513 \times 10^3 \times 10^3)^3} = 3,112 \cdot 10^7\ s$$

$$T_{Néé} = \frac{3,112 \cdot 10^7}{86400} = 360 \text{ jours solaire.}$$

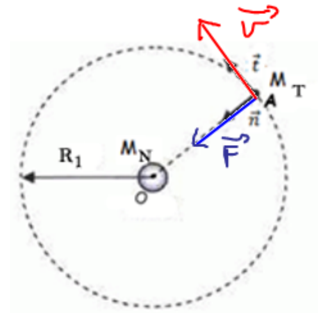
Cette valeur est bien en accord avec le texte.

2. Le mouvement de Triton :

2-1 : Expression vectorielle de $\vec{F}$

1 $$\vec{F} = +G \times \frac{M_T \times M_N}{R_1^2}\,\vec{n}$$

Les 2 vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires et de même sens. (+)



$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{1,025 \cdot 10^{26} \times 2,147 \cdot 10^{22}}{(3,547 \cdot 10^5 \times 10^3)^2} = 1,167 \cdot 10^{21}\ N$$

1 2-2 : Voir schéma
Tracé de $\vec{F}$

2.3 : D'après la seconde loi de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_T \times \vec{a}$$

2 $\Rightarrow \vec{F} = M_T \times \vec{a}$ donc $\cancel{M_T}\vec{a} = G \times \frac{\cancel{M_T} \times M_N}{R_1^2} \times \vec{n}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = G \times \frac{M_N}{R_1^2} \times \vec{n}}$$

2.4.1 : D'après l'expression de l'accélération $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \times \vec{t} + \frac{v^2}{R} \times \vec{n}$

on en déduit que

1 $$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \times \vec{t} + \frac{v^2}{R_1} = G \times \frac{M_N}{R_1^2} \times \vec{n}$$

donc $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{constante}$. Le mouvement de Triton est bien circulaire et uniforme.

2.4.2 : De la question précédente, on en déduit aussi que

1 $$\frac{v^2}{\cancel{R_1}} = \frac{GM_T}{R_1^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G.M_N}{R_1}}}$$

2.4.3 : Calcul de v

1 $$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}025 . 10^{26}}{3{,}547 . 10^3 \times 10^3}} = 4{,}39 . 10^4 \text{ m/s} = 4{,}39 \text{ km/s}$$

2.4.5 : Voir schéma question 2-1

1 Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement. $\vec{v} = v \times \vec{t}$

2.5 Expression de la période de révolution de Triton T_{rev}.

Triton parcourt une distance $P_T = 2\pi R_1$ (le périmètre) sur la durée $T_{rév}$

2 donc $v = \frac{2\pi R_1}{T_{rev}} \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 R_1^2}{T_{rev}^2} \Rightarrow T_{rev}^2 = \frac{4\pi^2 R_1^2}{v^2}$

$$\Rightarrow T_{rev}^2 = \frac{4\pi^2 \times R_1^2}{\frac{G \times M_N}{R_1}} = 4\pi^2 \times R_1^2 \times \frac{R_1}{G M_N} = \frac{4\pi^2 R_1^3}{G M_N}$$

donc $T_{rév} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_1^3}{G M_N}} \Rightarrow \boxed{T_{rev} = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{G \times M_N}}}$

2.6 : Calcul de $T_{rév}$

1 $$T_{rev} = 2\pi \sqrt{\frac{(3{,}547 . 10^6)^3}{6{,}67 . 10^{-11} \times 1{,}025 . 10^{26}}} = 5{,}08 . 10^5 \text{ s}$$

$$\Rightarrow T_{rev} = \frac{5{,}08 . 10^5}{84600} = 5{,}88 \text{ jours solaire.}$$

Cette valeur est cohérente avec le texte (5,877 jours solaires)

1 2.7 : On a trouvé $T_{rev}^2 = \frac{4\pi^2 R_1^3}{G M_N}$ donc $\frac{T_{rev}^2}{R_1^3} = \frac{4\pi^2}{G M_N} = \text{constante}$ 3ème loi de Kepler